

Inhalt		
Editorial		
Haben Sie schon mal illegale Drogen genommen?	Seite 1	
Simulationen mit normalverteilten Zufallszahlen	Seite 3	
Mathematik und Design: Die schönste Seite des Rechnens	Seite 4	
Mathematik-Lehr-Netzwerk MaLeNe	Seite 5	
Das Abwasserproblem allgemein	Seite 6	
Ein faires Münzspiel?	Seite 7	
Ergänzung zu: π - Bestimmung auf den Spuren von Archimedes	Seite 8	
Rätselecke	Seite 8	
Buchvorstellung	Seite 8	
Auf verschiedenen Wegen zur Markov-Kettenlänge	Seite 9	
Unendlich sinnvoll wählen	Seite 9	
Eine Explorationsaufgabe aus der Analysis mithilfe des ClassPad II	Seite 10	
Lehrer-Info-Service und Impressum	Seite 12	

Editorial

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

Sie halten die neueste Ausgabe des CASIO forum in der Hand: Es ist die **25.!** Seit 2007 erscheint es regelmäßig. Etwa 60 verschiedene Autoren haben in dieser Zeit dazu beigetragen, auch den Umfang stetig zu erweitern auf nunmehr 12 Seiten. Heute bekommen Sie mit dem CASIO forum regelmäßig eine umfassende Sammlung sehr hilfreicher und origineller Aufgabenbeispiele, Unterrichtseinheiten und Knobelaufgaben, stets auch unter Berücksichtigung didaktischer Aspekte. Sicher erinnern Sie sich spontan an einige Titelbilder; sie werden passend für den Artikel auf der ersten Seite so gestaltet, dass die Ausgabe ein ganz besonderes Gesicht bekommt.

Das zentrale Thema dieser Ausgabe ist die Wahrscheinlichkeit: In vier Beiträgen werden sehr verschiedene Aspekte beleuchtet. Dazu Anregungen für klassische Unterrichtsbeispiele, die Vorstellung des Netzwerks MaLeNe und wieder eine interessante Knobelaufgabe von Wolfgang Ludwicky zur Geometrie.

Zum Ausprobieren im Unterricht können Sie Rechner im Klassensatz einschließlich Zubehör kostenlos für vier Wochen ausleihen. Einen Überblick über dieses und weitere Angebote finden Sie auf unserer Internetseite im Bereich Lehrersupport. Über Rückmeldungen zur Umsetzung der Aufgaben im Unterricht oder Anregungen zu bestimmten Themen freuen wir uns! Auch Beiträge sind herzlich willkommen, gern als E-Mail an education@casio.de.

Ihr Redaktionsteam

i.A. CASIO

Aufgabenbeispiel mit dem ClassPad II

Haben Sie schon mal illegale Drogen genommen?

Autor: Antonius Warmeling, ehem. Fichte-Gymnasium, Hagen



Die Polizei kann zwar aus den ihr bekannten Fällen den Anteil der Menschen berechnen, die schon mit illegalen Drogen erwischt wurden. Aber wie groß ist die Dunkelziffer?

Um eine Abschätzung des sogenannten Dunkelfeldes zu bekommen, verwenden Statistiker die Randomized-Response-Technik. Sie sorgt durch eine Zufallsverschlüsselung dafür, dass eine Gruppenauswertung möglich ist, die Einstellung des Einzelnen aber geschützt bleibt. So werden die Befragten mit hoher Wahrscheinlichkeit wahrheitsgemäß antworten.

Da der Aufwand für eine einigermaßen verlässliche Schätzung ziemlich groß ist, gibt es in der Kriminalforschung bisher

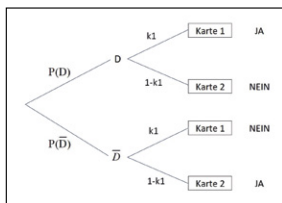
erst wenige tatsächlich durchgeführte Studien. In diesem Beitrag wird gezeigt, wie eine solche Befragung simuliert und ausgewertet werden kann. Jürgen Stein hat im CASIO forum 2007-2 schon gezeigt, wie die Simulation auch mithilfe der Tabellenkalkulation gelingen kann. Hier kommen Programme für den ClassPad – als Blackbox – zum Einsatz.

Auch wenn das grundlegende Handwerkszeug für die Auswertung der Simulationen mit den Baumdiagrammen schon in der Sekundarstufe I bekannt ist, ist die Unterrichtseinheit gut für die Einstiegsphase in der Oberstufe geeignet. Die weitergehenden Überlegungen sind eher für Kurse mit erhöhtem Leistungsniveau gedacht.

Der Einstieg

Da nicht das tatsächliche Verhalten der Kursteilnehmer ermittelt werden soll, bekommen einige zu Beginn der Stunde die Eigenschaft „Drogennehmer“ zugewiesen; dafür ziehen sie aus sehr vielen Zetteln einen mit der entsprechenden Information. Das hat den Vorteil, dass unter Berücksichtigung der verbleibenden Zettel der tatsächliche Anteil der „Drogennehmer“ berechnet werden kann. Dieses Ergebnis ist zum Vergleich der ersten Schätzungen sinnvoll und für die Simulation unerlässlich.

Der Zufallsprozess, der eine bestimmte Antwort aufgrund der vorgenommenen Markierung erzwingt, kann z.B. durch ein Set von drei Karten gesteuert werden: Auf zwei davon steht die Frage 1: „Haben Sie schon einmal illegale Drogen genommen?“ und auf der dritten Karte die Frage 2: „Haben Sie noch nie illegale Drogen genommen?“. Jede Gruppe erhält diese drei Karten. Jeder Lernende mischt die drei Karten, zieht eine und merkt sich die Frage. Danach legt er die Karte zurück. Nachdem alle eine Frage gezogen haben, werden alle um ein Handzeichen gebeten, die ihre Frage mit „JA“ beantworten müssen. Da niemand weiß, auf welche der beiden Fragen das JA folgte, ist die Anonymität des Einzelnen gewahrt. Diese Simulation wird einige Mal durchgeführt, die Anzahl der JA-Stimmen notiert.



Für die Auswertung muss herausgearbeitet werden, dass hier ein zweistufiger Zufallsversuch vorliegt, der am besten durch ein Baumdiagramm beschrieben werden kann. Zuerst liegen zwei Ausprägungen vor: D und \bar{D} mit $P(D)=x$. Dann „Karte 1“ und „Karte 2“ mit $p(\text{Karte 1})=k1$.

Mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten gilt:

$$P(JA) = P(D) \cdot k1 + P(\bar{D}) \cdot (1 - k1)$$

$$\Rightarrow P(D) = \frac{P(JA) - 1 + k1}{2k1 - 1}$$

Für die Auswertung steht nur der Anteil $X(JA)$ aus der Anzahl der JA-Stimmen und der Stichprobenumfang zur Verfügung. Für $k1$ wird das – nicht gesicherte – Verhältnis der Karten verwandt. Aus dem Simulationsergebnis mit z.B. 12 JA-Stimmen bei 25 Teilnehmern folgt $X(D) = 12/25$. Die JA-Antworten stammen von den Drogennehmern, die Frage 1 beantworten mussten, und den Nicht-Drogennehmern mit Karte 2. Daraus folgt die Gleichung

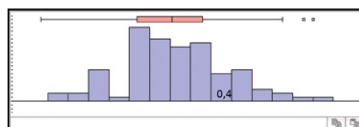
$$x \cdot \frac{2}{3} + (1 - x) \cdot \frac{1}{3} = \frac{12}{25}$$

$$\Rightarrow x = 0,44$$

Nun kann mitgeteilt werden, dass die Markierung z.B. bei 40% Drogennehmern lag, die Schätzung also recht gut ist. Aber was wäre bei z.B. 9 oder 17 JA-Stimmen? Daraus ergeben sich Schätzungen von 0,08 bzw. 1,04. Die erste Schätzung liegt völlig daneben, die zweite ist Unsinn. Wie kann das sein? Wird diese Frage diskutiert, wird klar, dass der Stichprobenumfang zu klein ist. Dadurch ist es purer Zufall, wenn die beiden Karten sowohl von D als auch \bar{D} ungefähr im Verhältnis 2:1 gezogen werden. Daher ist ein größerer Stichprobenumfang erforderlich. Dafür könnten z.B. 10 Simulationen zusammengefasst werden. Dadurch ergeben sich z.B. 121 JA-Stimmen bei einem Stichprobenumfang von 250. Das führt zur – nicht besonders guten – Schätzung 0,452.

Die Simulationsprogramme

An dieser Stelle kommt das Programm „dunkel1“ zum Einsatz. Wenn alle Kursteilnehmer eine Simulation mit $n = 2.000$ Befragten durchführen (das dauert mit dem ClassPad ca. 3 Minuten), liegen 25 Schätzungen zur Auswertung vor. Daraus kann z.B. ein Häufigkeitsdiagramm erstellt oder Durchschnitt und Standardabweichung berechnet werden. Mit einem Laptop und dem ClassPad-Manager können mit „dunkel2“ z.B. 100 Simulationen in ca. zwei Minuten erfolgen, der ClassPad bräuchte dafür mehrere Stunden. Die Ergebnisse werden in eine Liste (List1) geschrieben und können dann grafisch und rechnerisch ausgewertet werden. Die nachfolgende Grafik zeigt gleichzeitig ein Häufigkeitsdiagramm und ein Boxplot.



Der Mittelwert aller Schätzungen liegt bei 0,401 bei einer Standardabweichung von 0,0264. 95% aller Schätzungen liegen zwischen 0,347 und 0,453 (2σ -Intervall). Die mittleren 50% liegen zwischen 0,384 und 0,416.

Weitere Untersuchungen

Kann die Güte der Schätzung noch weiter verbessert werden? Neben dem Stichprobenumfang kann noch die Bedeutung des Kartenverhältnisses und der Einfluss des wahren Anteils der Drogennehmer untersucht werden. Die erste Gruppe variiert das Kartenverhältnis, lässt aber den Stichprobenumfang und Anteil der „Drogennehmer“ konstant. Die zweite Gruppe hält den Stichprobenumfang und das Kartenverhältnis fest, sie variiert nur den Anteil der „Drogennehmer“. Ohne einen PC mit dem ClassPad-Manager muss in dieser Phase jede Gruppe nur eine oder zwei Simulationen durchrechnen, vielleicht auch nur vom Umfang 1.000; die Ergebnisse werden danach zusammengeführt.

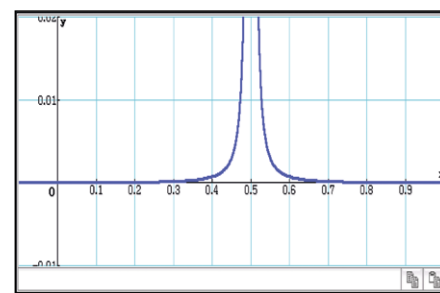
Die eigentliche Arbeit besteht darin, die Vermutungen, die über die Simulationsergebnisse

gewonnen wurden, anschließend mithilfe der Varianz des Schätzers zu bestätigen oder zu widerlegen. Diese Formel kann in der Schule nicht hergeleitet werden, sie wird vorgestellt und erläutert.

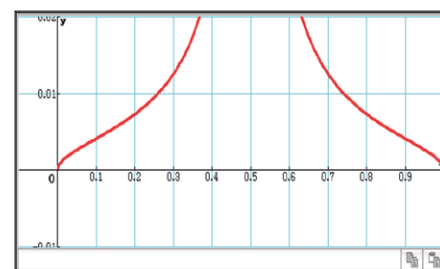
$$V(X(D)) = \frac{1}{N} (p(D)(1 - p(D)) \frac{k1(1 - k1)}{(2k1 - 1)^2})$$

Die Varianz für den Schätzer des Drogennehmeranteils ist vom Stichprobenumfang N , vom wahren Anteil der Drogennehmer $p(D)$ und von der Wahrscheinlichkeit für „Karte 1“ ($k1$) abhängig. Aber wie?

Da kann der ClassPad helfen. Die Schüler können die von ihnen gewählten konstanten Werte z.B. für N und $p(D)$ in die Formel eintragen und den Graphen von V im Intervall $[0;1]$ zeichnen lassen. Dabei ist die Fenstereinstellung wichtig. Die nachfolgende Grafik zeigt zunächst die Varianz, die nur im Bereich von 0,4 bis 0,6 deutlich größer wird.



Es ist zu sehen und auch leicht nachzuweisen, dass die Funktion eine Polstelle bei $k1=0,5$ hat, d.h. dass das Verfahren nicht funktioniert, wenn die beiden Karten in gleicher Anzahl vorhanden sind. Interessanter und aussagekräftiger ist der Graph der Standardabweichung. Er zeigt deutlich, dass die Schätzung umso besser wird, wenn $p(\text{Karte 1})$ an 0 bzw. 1 heranrückt, was auch ohne jede Rechnung einzusehen ist.



Das Programm

In den ersten beiden Abschnitten von **dunkel 1** werden zunächst die erforderlichen Eingaben abgefragt, dann der Zähler auf Null gesetzt und die Anzahl von Drogennehmern berechnet.

Der Hauptteil des Programms ist die For...Next-Schleife, die für jeden Befragten einmal durchlaufen wird. Dort sind drei Schritte zu erledigen: Der Teilnehmer wird markiert, dann wird die Kartenauswahl simuliert und schließlich der Zähler hoch-

gesetzt, wenn der Teilnehmer mit JA antworten muss.

Schließlich wird der Schätzwert berechnet und zusammen mit der Zahl der JA-Antworten ausgegeben.

In **dunkel 2** wird nur noch eine zusätzliche For...Next-Schleife eingebaut, sodass die Befragung „beliebig“ oft durchgeführt und ausgewertet werden kann.

```
dunkel1 | N
SetDecimal
ClrText
Input bf, "Anzahl Befragte", "Gib ein"
Input k1, "Anzahl Karten 1", "Gib ein"
Input k2, "Anzahl Karten 2", "Gib ein"
Input p1, "tatsächlicher Anteil", "Drogennehmer"

0→ ja
fround(p1*bf, 0)→ fip
For 1→n to bf
'Markierung Drogennehmer
if n ≤ fip
then : 1→d : else : 2→d
ifend
'Welche Karte wird gezogen?
if rand(1, k1+k2) ≤ k1
then : 1→k : else : 2→k
ifend
```

```
'Bei Ja Zähler um 1 erhöhen
if d=1 and k=1 'Drogennehmer und Karte 1
then : ja+1→ja
elseif d=2 and k=2 'Drogennehmer und Karte 2
then : ja+1→ja
ifend
Next
'Berechnung des Schätzwertes
(ja/bf*(k1+k2)-k2)/(k1-k2)→ r
print "Von den Befragten haben mit Ja geantwortet "
print ja
print "Daraus ergibt sich eine Schätzung von p(D):"
print r
```

Simulationen mit normalverteilten Zufallszahlen

Autor: Jürgen Appel, Deutschorden-Gymnasium, Bad Mergentheim

Aufgabe

Bei einem Biathleten wird im Training über mehrere Monate eine Statistik über seine Schießleistungen geführt. Dabei wird bei jedem Schuss erfasst, wo die Kugel im Koordinatensystem einschlägt. Der Ursprung des Koordinatensystems ist der Mittelpunkt der Zielscheibe. Bei jedem Schuss werden die beiden Koordinaten des Einschlagpunktes der Kugel notiert (gemessen in cm). Dabei misst die x-Koordinate die Abweichung nach links und rechts, die y-Koordinate die Abweichung nach oben und unten. Im Stehend- und im Liegendschießen ist sowohl für die x- als auch die y-Koordinate der Erwartungswert jeweils 0 ($\mu_x = \mu_y = 0$). Im stehenden Schießen ist die Streuung der Schüsse erwartungsgemäß größer als im liegenden Schießen. Für das Stehendschießen gilt für die Standardabweichungen $\sigma_x = \sigma_y = 3$. Für das Liegendschießen gilt für die Standardabweichungen $\sigma_x = \sigma_y = 1$. Der Radius der Zielscheibe beträgt beim Stehendschießen 5,5 cm und beim Liegendschießen 2,25 cm.

Frage 1

Wie hoch ist die Trefferwahrscheinlichkeit des Biathleten beim stehenden bzw. beim liegenden Schießen?

Diese Frage lässt sich im Mathematikunterricht der Kursstufe nicht rechnerisch bestimmen, da hierzu die mathematischen Mittel fehlen. Daher kann hier nur experimentell vorgegangen werden, indem das Schießen mithilfe des FX-CG50 simuliert wird. Dabei muss die Anzahl der Simulationen natürlich hoch genug sein, um einigermaßen gesicherte Aussagen machen zu können. Die Simulation wurde im Menü Tabellenkalkulation durchgeführt. Dabei wurde der Random-Befehl „RanNorm#“ verwendet. Dieser Befehl liefert normalverteilte

Zufallszahlen zu gegebenem Erwartungswert μ und Standardabweichung σ . Im Menü Tabellenkalkulation kann dieser Befehl mithilfe der Tastenkombination: **[OPTN] [F5] (PROB) [F4] (RAND) [F3] (Norm)** gefunden werden.

Damit der FX-CG50 nicht zu viel Speicherkapazität und Rechenzeit benötigt, wird das Experiment zunächst nur 100 Mal simuliert. Allerdings kann dann sehr bequem diese Simulation z.B. zehnmal nacheinander durchgeführt und somit eine genügend große Anzahl an Simulationen erhalten werden. Damit für beide Schießarten nicht alles neu eingegeben werden muss, werden die Parameter μ , σ und r (Radius der Scheibe) auf feste Zellen gelegt, damit sie abgerufen werden können. Die Zellen wurden folgendermaßen belegt: μ_x auf A1, μ_y auf A2, σ auf A3 und r auf A4. In die Spalte B wurden die Zufallszahlen für die x-Koordinate, in die Spalte C für die y-Koordinate gelegt. In der Spalte D wurde der Abstand des Einschlagpunktes zum Ursprung berechnet ($D = \sqrt{B^2 + C^2}$).

In der Spalte E wurde dann mit einer „if-Abfrage“ überprüft, ob D kleiner oder gleich dem Radius r der Zielschiebe ist. Dabei steht in der Spalte E genau dann eine 1, falls der Abstand kleiner gleich r ist, ansonsten eine 0. Somit steht eine 1 für einen Treffer. In der Zelle F1 wurde dann die Summe der Spalte E berechnet, also die Anzahl der Treffer in einer Serie von 100 Schüssen. In der Zelle F2 wurden dann die Teilergebnisse der Simulationen addiert und damit gleichzeitig eine neue Berechnung ausgelöst.

SHE	A	B	C	D
1	0	-3.617	-7.257	
2	0	-1.346	-5.322	
3	3	1.5083	1.038	
4	5.5	-4.078	-1.444	
5		-1.498	1.9347	

=RanNorm#(A\$3, A\$2)

SHE	B	C	D	E
1	1.3473	0.5961	1.4733	1
2	-0.753	-0.541	0.9275	1
3	0.015	0.4238	0.4241	1
4	1.5312	0.9157	1.7841	1
5	-0.828	1.6682	1.8625	1

=CellIf(D1≤A\$4, 1, 0)

SHE	C	D	E	F
1	1.559	3.9993	1	83
2	1.5556	3.1546	1	
3	5.425	5.8398	0	
4	0.798	1.8998	1	
5	3.0197	4.4947	1	

=CellISum(E1:E100)

SHE	C	D	E	F
1	3.4092	4.1193	1	76
2	-1.551	2.3397	1	743
3	-2.291	4.7433	1	
4	2.8976	6.6048	0	
5	0.879	3.3635	1	

743+76

SHE	C	D	E	F
1	0.8837	4.729	1	83
2	-5.695	7.2466	0	819
3	-2.841	3.1955	1	
4	1.6039	3.9995	1	
5	1.0595	2.5583	1	

819

Die Screenshots zeigen die Ergebnisse einer Simulation von insgesamt 1.000 Schüssen (10 mal 100) des Stehendschießens. Dies würde bedeuten, dass der Biathlet eine Trefferwahrscheinlichkeit von 81,9% hat.

Jeweils zehn Schülerinnen und Schüler simulierten das Stehendschießen bzw. Liegendschießen jeweils 1.000 Mal. Die Ergebnisse für die Trefferwahrscheinlichkeit (in Prozent) durch diese Simulationen zeigt die folgende Tabelle:

Schießen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Durchschnitt
stehend $\mu = 0; \sigma = 3$	82,8	81,1	82,5	82,3	81,7	80,7	81,1	82,1	81,5	82,2	81,80
liegend $\mu = 0; \sigma = 1$	92,8	93,4	92,2	91,5	91,5	90,9	91,8	92,0	93,0	91,5	92,06

- Die Simulationsergebnisse streuen erstaunlich wenig.
- Die Werte für das Stehendsschießen haben eine Standardabweichung von ca. 0,65 % bei einem Mittelwert von 81,80 %.
- Die Werte für das Liegendsschießen haben eine Standardabweichung von ca. 0,75 % bei einem Mittelwert von 92,06 %.
- Die bestimmten Werte sind typische Werte für gute Schützen unter den Biathleten für ein Schießen ohne spürbare Windbeeinflussung.

Hinweis:

Wenn eine näherungsweise Berechnung der Trefferwahrscheinlichkeiten mithilfe von Zerlegungssummen durchgeführt wird, dann ergeben sich bei einer Schrittweite von $\Delta x = 0,025$ die „theoretischen“ Werte:

- Trefferwahrscheinlichkeit stehend: ca. 81,37 %
- Trefferwahrscheinlichkeit liegend: ca. 92,03 %

Die Ergebnisse der Simulationen liegen sehr nahe an den näherungsweise berechneten theoretischen Werten.

Frage 2

Wie hoch ist die Trefferwahrscheinlichkeit des Biathleten beim Liegendsschießen, falls er auf eine Änderung der Seitenwindgeschwindigkeit nicht reagiert?

Wenn sich die Windverhältnisse gegenüber dem Einschießen verändert haben, reagiert normalerweise ein erfahrener Biathlet, indem er am Diopter dreht und somit den Einfluss des Seitenwindes durch Anpassung der Visierlinie ausgleicht.

Es soll untersucht werden, wie sich die Trefferwahrscheinlichkeit beim Liegendsschießen des Biathleten verändert, falls er nicht auf die Veränderung des Seitenwindes reagiert.

Das Szenario soll dadurch vereinfacht werden, dass der zusätzliche Seitenwind von links kommt und nur die x-Koordinate des Einschlagpunktes beeinflusst.

Hintergrundinformationen:

Laut einem führenden Munitionshersteller (Quelle: www.lapua.com) erfährt die Kugel des Munitionstyps Polar Biathlon bei einem Seitenwind von $4 \frac{m}{s}$ auf eine Entfernung von 50m eine Seitendrift von 25mm (2,5 cm). Die Didion'sche Formel besagt, dass die Seitendrift proportional zur Geschwindigkeit des Seitenwindes ist (Quelle: Artikel „Ballistik“ von M. Tschannen).

Es soll die Trefferwahrscheinlichkeit für eine Seitenwindveränderung von $2 \frac{m}{s}$ bzw. von $4 \frac{m}{s}$ durch Simulation bestimmt werden. Somit verändert sich in der Simulation nur jeweils der Wert von μ_x .

- Für eine Windgeschwindigkeit von $2 \frac{m}{s}$ gilt: $\mu_x = 1,25$
- Für eine Windgeschwindigkeit von $4 \frac{m}{s}$ gilt: $\mu_x = 2,5$

SHE	A	B	C	D
1	1.25	-0.431	0.7551	0.8699
2	0	0.4264	-0.293	0.5175
3	1	2.7257	-0.794	2.8391
4	2.25	-0.63	-0.07	0.6344
5	0.2409	-0.364	0.4371	
				1.25

SHE	A	B	C	D
1	2.5	2.3204	-0.584	2.3929
2	0	1.6878	0.5543	1.7765
3	1	2.2036	0.8174	2.3503
4	2.25	3.3963	0.2602	3.4063
5	2.9544	1.3526	3.2493	
				2.5

SHE	C	D	E	F
1	0.139	1.6172	1	30
2	0.2387	0.514	1	75
3	-0.707	2.0899	1	
4	1.1188	3.4448	0	
5	-0.588	1.2295	1	
				=CellSum(E1:E100)

Jeweils zehn Schülerinnen und Schüler simulierten das Liegendsschießen mit $2 \frac{m}{s}$ bzw. $4 \frac{m}{s}$ Windgeschwindigkeit jeweils 1.000 Mal. Die Ergebnisse für die Trefferwahrscheinlichkeit (in Prozent) durch diese Simulationen zeigt die folgende Tabelle:

Schießen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Durchschnitt
liegend $\mu = 1,25 ; \sigma = 3$	73,8	75,5	76,9	75,7	78,0	75,9	76,9	74,3	73,4	75,4	75,58
liegend $\mu = 2,5 ; \sigma = 1$	30,8	32,0	31,8	30,3	31,9	32,0	30,7	32,0	32,0	31,3	31,48

- Die Simulationsergebnisse streuen erneut wenig.
- Die Werte für das Liegendsschießen mit $2 \frac{m}{s}$ Windgeschwindigkeit haben eine Standardabweichung von ca. 1,38 % bei einem Mittelwert von 75,58 %.
- Die Werte für das Liegendsschießen mit $4 \frac{m}{s}$ Windgeschwindigkeit haben eine Standardabweichung von ca. 0,62 % bei einem Mittelwert von 31,48 %.

Hinweis:

Wenn eine näherungsweise Berechnung der Trefferwahrscheinlichkeiten mithilfe von Zerlegungssummen durchgeführt wird, dann ergeben sich bei einer Schrittweite von $\Delta x = 0,025$ die „theoretischen“ Werte:

- Trefferwahrscheinlichkeit stehend: ca. 75,30 %
- Trefferwahrscheinlichkeit liegend: ca. 31,94 %

Die Ergebnisse der Simulationen liegen sehr nahe an den näherungsweise berechneten theoretischen Werten.

Es ist deutlich erkennbar, dass schon eine relativ kleine Geschwindigkeitsänderung von $4 \frac{m}{s}$ die Trefferwahrscheinlichkeit deutlich sinken lässt, falls der Schütze nicht durch Drehen am Diopter auf diese Änderung reagiert.

Mathematik und Design: Die schönste Seite des Rechnens



Autos, Möbel, Gebäude: Designentwürfe werden nicht nur an ihrer kreativen Gestaltung gemessen – die Werke müssen auch ihren Zweck erfüllen. Damit das gelingt, sind viele Berechnungen nötig: Geometrie kommt in Designstudios ebenso zur Anwendung wie Differenzialrechnung. In der aktuellen Ausgabe des Lehrerspezials können sich Mathematiklehrkräfte von den Rechenwegen kreativer Köpfe inspirieren lassen. Unter www.casio-schulrechner.de/lehrerspezial zeigt CASIO die Mathematik hinter den extravaganten Bauwerken Antoni Gaudís und den Mustern M. C. Eschers. Außerdem in der Rubrik „Themenspezial“: Anregungen aus der Origamics-Szene

sowie kreative Aufgaben aus dem Bereich Verpackungsdesign.

Ein Ausflug in die Designwelt lohnt sich im Mathematikunterricht nicht nur wegen der Realitätsnähe – leicht können Schülerinnen und Schüler mit künstlerischer Neigung ins Boot geholt werden. Wer sich nach der Schulzeit mit Design und Mathematik beschäftigen möchte, findet in der Rubrik „Berufsspezial“ fünf Vorschläge für passende Ausbildungsberufe und Studiengänge. In einem spannenden Interview stellt Professor Lutz Fügner von der Hochschule Pforzheim den Studiengang Transportation Design vor und erzählt unter anderem, warum Kurven fünfter Ordnung im Autodesign eine wichtige Rolle spielen.

Mathematik-Lehr-Netzwerk MaLeNe

Autoren: Hans-Stefan Siller, Hans-Georg Weigand, Norbert Noster – Universität Würzburg



Mitte März 2019 wurde der DigitalPakt Schule (vgl. <https://www.bmbf.de/de/wissenswertes-zum-digitalpakt-schule-6496.php>) des Bundesministeriums für Bildung und Forschung zusammen mit den Ländern erfolgreich verhandelt. Damit einher geht eine Förderung der Digitalisierung an deutschen Schulen. Bislang ist bekannt, dass damit Schulen eine bessere Ausstattung erhalten sollen. Wie diese Ausstattung konkret aussehen wird, ist noch nicht endgültig klar. Sicher ist, dass Schulen bald auf eine – wie auch immer geartete – bessere technische Ausstattung zugreifen können.

Lehrkräfte – im Dienst und in der Ausbildung – sowie angehende Lehrkräfte benötigen dann ein entsprechendes Know-how, um diese Ausstattung adäquat nutzen zu können. Noch wichtiger ist es, dass dann auch methodisch-didaktische Konzeptionen und entsprechende Aufbereitungen umgesetzt werden können.

Es wird deswegen einen hohen Bedarf an Aus-, Fort- und Weiterbildung geben; der Wirkungsforschung in diesem Bereich wird besondere Bedeutung zukommen. Genau hier setzt das Projekt Mathematik-Lehr-Netzwerk an, kurz: MaLeNe. Am Lehrstuhl für Mathematik V (Didaktik der Mathematik) an der Julius-Maximilians-Universität Würzburg wird es in einer zunächst für drei Jahre angelegten Partnerschaft mit CASIO durchgeführt.

Hauptaugenmerk im Projekt liegt in der Steigerung der Qualität des Mathematikunterrichts durch den Einsatz digitaler Technologien. Bedingungen sollen identifiziert und kritisch hinterfragt werden, unter denen der Einsatz digitaler Technologien gelingt. So wird die digitale Bildungsoffensive auch mit (fach-)didaktisch fundierten Konzepten gestützt. Dies alles wird durch eine Beteiligung der Teilnehmer im MaLeNe durch Vorträge, Workshops bei Fortbildungen und eine systematische wissenschaftliche Begleitung ermöglicht. Die enge Verzahnung von Schulpraxis und Wissenschaft ermöglicht eine praxisnahe und wissenschaftlich fundierte Erstellung frei verfügbarer Materialien sowie evidenzbasierte Fort- und Weiterbildungen für Lehrkräfte durch regionale Ansprechpartner.

Was das Mathematik-Lehr-Netzwerk Lehrkräften bietet

MaLeNe steht interessierten Mathematik-Lehrkräften in allen Bundesländern offen. Um einen kurzen Einblick in die Netzwerkarbeit zu geben, ist hier aufgelistet, was Sie alles von MaLeNe erwarten können:

- Teilnahme an MaLeNe-Fortbildungen zum Einsatz digitaler Technologien,
- Regelmäßige Information über neue Entwicklungen im Bildungsbereich und bei digitalen Technologien,
- Fertige MaLeNe-Unterrichtsmaterialien,
- Entwicklung von Unterrichtsmaterialien,
- Teilnahme am digitalen MaLeNe-Diskussionsforum,
- Teilhabe an einem Netzwerk interessierter und engagierter Lehrkräfte,

Weitere Informationen über das Netzwerk sind auf der MaLeNe-Homepage einsehbar (www.mathematik-lehr-netzwerk.de).

Mitarbeit im Mathematik-Lehr-Netzwerk

Alle Lehrkräfte, die sich für den sinnvollen Einsatz digitaler Technologien im Mathematikunterricht begeistern, sind herzlich eingeladen bei MaLeNe mitzuwirken! Beispielsweise könnten Sie:

- Fortbildungen für Lehrkräfte und auch für Fortbilder anbieten,
- Materialien für Fortbildungen und Unterricht entwickeln,
- Im Team mit kompetenten Personen (den MaLeNe-Koordinatoren) Ansprechpartner in den einzelnen Bundesländern werden.

Haben Sie Interesse, einer dieser Tätigkeiten nachzugehen? Dann schreiben Sie eine Mail an info@mathematik-lehr-netzwerk.de. Schreiben Sie auch, wenn Sie regelmäßig über anstehende Veranstaltungen informiert werden möchten oder noch Fragen haben.

Vielleicht treffen Sie schon bald auf einer MaLeNe-Veranstaltung auf interessierte Kolleginnen und Kollegen. Oder im Netzwerk, wenn Sie dort aktiv werden. Das Team freut sich schon auf viele neue Begeisterte.



Mathematik-Lehr-Netzwerk

Kontakt

Lehrstuhl für Mathematik V
(Didaktik der Mathematik)
c/o Mathematik-Lehr-Netzwerk
Emil-Fischer-Straße 30
97074 Würzburg

✉ info@mathematik-lehr-netzwerk.de

🌐 www.mathematik-lehr-netzwerk.de

Das Abwasserproblem allgemein

Autor: Dr. Jens Weitendorf, ehem. Gymnasium Harksheide, Norderstedt

In dem Artikel „Das Abwasserproblem“ (s. CASIO forum 1/2019) wurde eine Lösung für den konkreten Fall gefunden.

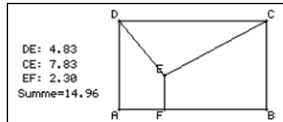


Abb. 1 Veranschaulichung des Problems

Für den konkreten Fall wurde festgestellt, dass sich für den optimalen Fall ein Winkel von 120° ergibt. Wenn dies allgemein gültig ist, müsste sich dieser Winkel unabhängig von der Lage der Punkte C und D ergeben. Dabei sei zunächst vorausgesetzt, dass die Strecke DC parallel zur Leitung ist. Die Abbildung 2 zeigt zunächst, dass der ClassPad das allgemeine Gleichungssystem nicht lösen kann. Unter der Symmetrieannahme bzgl. der x -Richtung zeigt sich, dass sich ein Winkel von 120° ergibt.

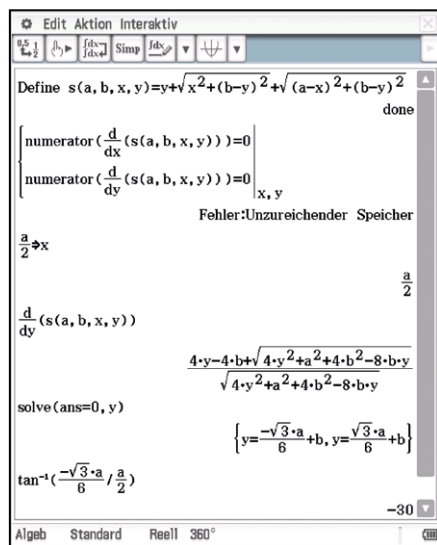


Abb. 2 Lösung des allgemeinen Problems

Zu dem berechneten Winkel (s. Abb. 2) sind noch 90° hinzuzufügen. Die Symmetrieannahme lässt sich durch die folgende Reduzierung des Problems (s. Abb. 3) begründen: Die Summe der Strecken s_1 und s_2 ist genau dann minimal, wenn das Dreieck ECD gleichschenkelig ist.

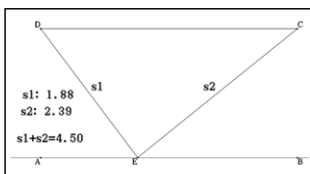


Abb. 3 Vereinfachung des Problems

Die Symmetrie lässt sich zum einen geometrisch begründen oder algebraisch

mit den üblichen Mitteln der Analysis (s. Abb. 4).

$$\frac{d}{dx} (\sqrt{b^2+x^2} + \sqrt{(a-x)^2 + b^2})$$

$$\frac{x \cdot \sqrt{x^2+a^2+b^2} - 2 \cdot a \cdot x + x \cdot \sqrt{x^2+b^2} - a \cdot \sqrt{x^2+b^2}}{\sqrt{(x^2+a^2+b^2) \cdot (x^2+b^2)}}$$

solve(ans)

$$\left\{ x = \frac{a}{2} \right\}$$

Abb. 4 Analytische Bestimmung des Minimums

Ob es diese allgemeine Lösung gibt, hängt natürlich vom Verhältnis der Abstände der Punkte A und B und vom Abstand der Strecke AB von der Hauptleitung ab. Dieses kann experimentell angegangen werden (s. Abb. 5).

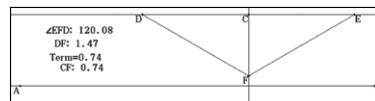


Abb. 5 Experimentelles Erforschen der Grenze der Allgemeingültigkeit

Es ergibt sich ein Winkel EFD von 120° , wenn für die Strecke CF gilt: $CF = \frac{1}{2} DF$ bzw., da $\tan(60^\circ) = \sqrt{3}$, muss gelten: $DE \geq \sqrt{3} \cdot \text{Abstand}(DE, AB)$. Bei kleineren Abständen werden die beiden Leitungen direkt bei der Hauptleitung zusammengeführt. Der Winkel von 120° ist auch bei den Waben der Bienen zu beobachten, da die Abstandsverhältnisse dies natürlich zulassen. Für das Abwasserproblem bleibt die Frage, ob sich der Winkel von 120° auch ergibt, wenn die Parallelität nicht mehr gegeben ist.

Die Beantwortung dieser Frage geschieht zunächst an einem konkreten Beispiel: Die Leitung AB liegt auf der x -Achse und die Punkte $C(10/8)$ und $D(0/6)$ werden gewählt. Die optimale Lage des Punktes E lässt sich jetzt bestimmen (s. Abb. 6). Es wird zunächst die allgemeine Abstandsfunktion definiert. Wenn jetzt die beiden partiellen Ableitungen gebildet und diese gleich 0 gesetzt werden, zeigt sich, dass der ClassPad das Gleichungssystem nicht lösen kann. Es wird eine weitere Annahme benötigt, die sich aus der folgenden Abbildung ergibt (s. Abb. 6). Durch entsprechendes Experimentieren fällt auf, dass die Strecken DE und EF gleich lang sein müssen. Wenn dies angenommen wird, so ergibt sich eine Vereinfachung der Abstandsfunktion.

Es gilt:

$$s = DE + EF + FC + EG = 2DE + FC + EG$$

$$E = (x, y) \quad A = (0,0) \quad B = (10,0) \quad C = (10,8) \quad D = (0,6)$$

$$F = (2x, 6) \quad H = (10,6) \quad G = (x, 0)$$

$$\rightarrow s = y + 2\sqrt{(6-y)^2 + x^2} + \sqrt{(10-2x)^2 + 2^2}$$

$$\rightarrow s = y + 2\sqrt{36 - 12y + y^2 + x^2} + 2\sqrt{26 - 10x + x^2}$$

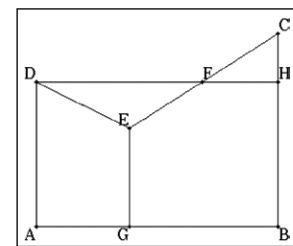


Abb. 6 Hilfskonstruktion zur Vereinfachung

Jetzt ist der ClassPad in der Lage, das Gleichungssystem zu lösen (s. Abb. 7 Zeilen 3-6). Die erste Lösung kommt nicht in Betracht. Es fällt auf, dass sich wieder ein Winkel von 120° ergibt (s. Abb.7, letzte Zeile; ein Winkel von 90° ist noch zu addieren).

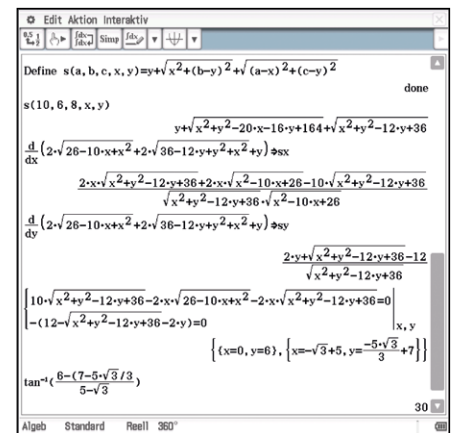


Abb. 7 Bestimmung des Minimums für $D(0/6)$ und $C(10/8)$

Der obige Lösungsweg lässt sich leider nicht auf den allgemeinen Fall übertragen, da zumindest mit dem ClassPad die entsprechenden Gleichungen nicht gelöst werden können. Dies gilt auch, wenn ein Winkel von 120° vorausgesetzt wird.

Der Sachverhalt kann in der Geometrie-Anwendung dargestellt werden (s. Abb. 8). Vorausgesetzt wird, dass der Punkt J so gewählt wird, dass die Länge der Leitung in Bezug auf die Punkte D und J minimal ist. Dazu wird zunächst die „Hauptleitung“ durch die Punkte AB gelegt und die beiden zu verbindenden Orte C und D beliebig gesetzt. Durch den Punkt D ,

der näher zur Hauptleitung liegt, wird eine Parallele zu dieser gezogen. Durch den Punkt C wird eine Halbgerade gelegt, deren Richtung durch den variablen Punkt I bestimmt ist. Der Punkt J ist der Schnittpunkt dieser Halbgeraden mit der Parallelen durch D . Zu den Punkten D und J wird die Mittelsenkrechte konstruiert. Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten mit der Geraden AB ist der Punkt L , und der Punkt K ist der Schnittpunkt mit der Halbgeraden CI .

Sowohl die Halbgerade als auch die Mittelsenkrechte wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit verborgen. Der dargestellte Winkel sollte 120° betragen. Durch Ziehen am Punkt I lässt sich die Winkelgröße variieren. Vorher ist es erforderlich, dass der Punkt C fixiert wird.

Damit Unterschiede erkennbar werden, wurde die Grundeinstellung der Messwerte auf 6 Stellen hinter dem Komma verändert.

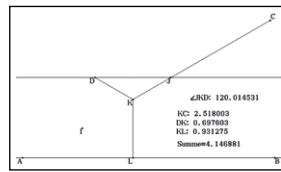


Abb. 8 Geometrische Erkundung

Durch die Variation von I fällt auf, dass sich das Minimum für den Winkel JKD für 120° ergibt. Verstärken lässt sich das obige, indem eine weitere Parallele durch K gelegt und gezeigt wird, dass sich für andere Punkte auf dieser Parallelen ein größerer Wert sowohl für den Winkel als auch für die Strecke ergibt (s. Abb.9).

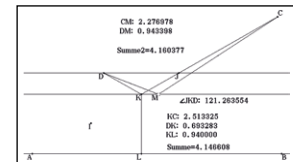


Abb. 9 Eine weitere geometrische Erkundung

Das Problem wurde durch einen Wechsel von geometrischen und analytischen Überlegungen diskutiert und ist daher ein gutes Beispiel für den Technologieeinsatz im Mathematikunterricht.

Dabei wurde zum einen die Dynamik der DGS und zum anderen das CAS benutzt. Die doch eher komplexen Umformungen sind nicht für einen händischen Umgang geeignet.

Ein faires Münzspiel?

Autor: Gerhard Glas, Marienschule Offenbach



In einem Beitrag in der FAS vom 3.6.18 wurde ein interessantes Spiel vorgestellt, das auf eine Idee von Ole Peters zurückgeht: Bei einem Münzwurf wird auf das Ergebnis gewettet, ein Einsatz von 100,-€ wird auf Wappen oder Zahl gesetzt. Im Gewinnfall werden 150,-€ ausbezahlt, im Verlustfall noch 60,-€, der Einsatz von 100,-€ ist verloren. Anschließend wird das neue Kapital für die Wette auf den nächsten Münzwurf eingesetzt.

Der Gewinner beider Wetten hat dann schon 225,-€, wer einmal verloren und einmal gewonnen hat, besitzt noch 90,-€, der Verlierer beider Wetten hat nur noch 36,-€. Der Erwartungswert ist nach der ersten Runde mit 105,-€ deutlich über dem anfänglichen Einsatz von 100,-€, die Stan-

dardabweichung mit 45€ recht gering. Von Runde zu Runde steigt der Erwartungswert um jeweils 5%, die Standardabweichung nimmt deutlich stärker zu. Nach 5 Runden hat sie den Erwartungswert von 127,63€ schon übertroffen: $\sigma = 146,83\text{€}$.

Nach einer ungeraden Anzahl von Wettrunden gibt es immer gleich viele Verlierer und Gewinner, in der Folgerunde überwiegen die Verlierer deutlich. Das lässt sich im Unterricht schön mit einem Baumdiagramm aufzeigen, eine klassische Binomialverteilung. Wenn 100-mal gespielt wird, darf ein Teilnehmer nur 44-mal verloren haben, um noch mit einem leichten Plus die Runde zu beenden. Die Wahrscheinlichkeit dafür, noch zu den Gewinnern zu gehören, beträgt nur 13,6%! Der Erwartungswert ist nach 100 Runden jedoch schon bei 131.501,26€ angekommen.

Bei 1.000 Spielrunden sind schon 558 Gewinnrunden erforderlich, um am Ende keinen Verlust zu verbuchen. Die Wahrscheinlichkeit, jetzt noch zu den Gewinnern zu gehören, ist schon auf 0,014% gesunken, der Mittelwert aber schon auf sagenhafte $154,63 \cdot 10^{21}\text{€}$ angewachsen. Dagoberts Geldspeicher würde dafür kaum ausreichen. Nachrechnen lässt sich das alles sehr leicht, z.B. mit dem FX-991DE X ClassWiz im Statistikenmenü.

Diese Aufgabe hat der Schriftsteller Marc Elsberg in seinem lesenswerten neuen Roman „Gier“ aufgegriffen; der Professor für Ökonomie Ole Peters hat zu dieser Rechnung auch viel publiziert. Er nimmt diese Auf-

gabe als Beispiel für ein Wirtschaftssystem, das jährlich 5% Wachstum aufweist. Dabei werden Reiche immer reicher und sehr viele immer ärmer, die Ungleichheit nimmt rasant zu. Der Mittelwert sagt nichts darüber aus, dass sehr viele Menschen viel verlieren. Und nichts darüber, wie es einem einzelnen Menschen ergeht. Wenn ein Multimillionär eine weitere Million einnimmt und gleichzeitig viele arbeitslos werden, dann ist der Mittelwert wieder um 5% gestiegen, für die vielen Arbeitslosen ist das aber nicht relevant.

Eine sozialverträgliche Lösung wäre: Zwei Spieler legen ihre Einnahmen nach einer Runde zusammen und teilen diese Summe unter sich 1:1 auf. Anschließend setzt jeder seinen Anteil wieder ein: Der eine wettet auf Wappen, der andere auf Zahl. Danach wird wieder zusammengelegt und gerecht geteilt. So wächst das Vermögen von jedem der beiden Spieler wie der Mittelwert. Dies ist sicher ein einfaches, aber schönes Beispiel, um zu diskutieren, was bei einem Glücksspiel „fair“ bedeutet, welche Strategien bei einem Spiel sinnvoll sind und welche Parallelen es zwischen Mathematik und Ökonomie gibt.

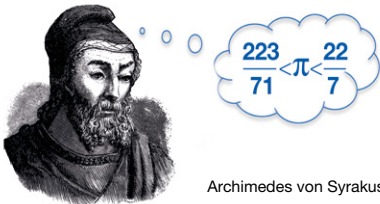
Die Ausführungen von Ole Peters dazu sind sehr lesenswert, einen Vortrag von ihm zu diesem Thema (in Englisch) gibt es unter <http://lml.org.uk/research/economics/> und eine anschauliche Animation unter <https://www.researchers.one/article/2019-03-4>.

Diese Überlegungen lassen sich auch auf andere bekannte Glücksspiele übertragen, wie z.B. Lotto, Spiel 77 oder Roulette.

Ergänzung zu: π - Bestimmung auf den Spuren von Archimedes

Autor: Dr. Jens Weitendorf, ehem. Gymnasium Harksheide, Norderstedt

Armin Baeger hatte im CASIO forum 1-2019 die „ π -Bestimmung auf den Spuren von Archimedes“ mit dem FX-991DE X beschrieben (Seite 5).



Archimedes von Syrakus

Näherungswerte für π lassen sich, wie im Artikel beschrieben, mithilfe der Tabellenkalkulation berechnen (s. Abb. 1)

	A	B	C
1	n-Eck		
2	6	1	3
3	12 0. 517643	3. 105828541	
4	24 0. 261053	3. 132628613	
5	48 0. 130813	3. 139350203	
6	96 0. 065443	3. 141031951	
7	192 0. 032723	3. 141452472	
8	384 0. 016363	3. 141557608	
9	768 8. 18E-3	3. 141583892	
10	1536 4. 09E-3	3. 141590463	
11	3072 2. 05E-3	3. 141592106	
12	6144 1. 02E-3	3. 141592512	
13	12288 5. 11E-4	3. 141592602	
14	24576 2. 56E-4	3. 141592722	
15	49152 1. 28E-4	3. 141592482	
16	98304 6. 39E-5	3. 141593443	

Abb. 1 Berechnung einer Näherung für π

In Abbildung 1 fällt auf, dass der Wert für das 49.152-Eck nicht stimmen kann, da die Werte aufgrund des Verfahrens nicht fallen können.

14	24576	2. 56E-4	3. 141592722
15	49152	1. 28E-4	3. 141592482
16	98304	6. 39E-5	3. 141593443
17	196608	3. 20E-5	3. 141593443
18	393216	1. 60E-5	3. 141608823
19	786432	7. 99E-6	3. 141547302
20	1572864	3. 99E-6	3. 141793379

Abb. 2 Versuch, die Näherung zu präzisieren

Werden weitere n-Ecke berechnet, so wird deutlich, dass Ergebnisse immer stärker schwanken (s. Abb. 2). Das heißt, das angewandte Verfahren liefert wahrscheinlich nur eine Präzision für die ersten 5 Stellen nach dem Komma. Aber auch das ist nur eine Vermutung. Wird nur dieses Verfahren betrachtet, so könnte sich der Eindruck ergeben, dass der Wert für das 98.304- bzw. 196.608-Eck eine ganz brauchbare Näherung für π angibt, was aber nicht der Realität entspricht.

Werden weitere Werte berechnet, so ergibt sich eine sogenannte Subtraktionskatastrophe (s. Abb. 3).

19	786432	7. 98936793E-6	3. 141547302
20	1572864	3. 99499687E-6	3. 141793379
21	3145728	1. 99749844E-6	3. 141793379
22	6291456	1E-6	3. 145728
23	12582912	0	0

Abb. 3 Subtraktionskatastrophe

Das Problem hinsichtlich der Subtraktion lässt sich dadurch umgehen, indem der Berechnungsterm mit $\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}$ erweitert wird. Nach einigen Umformungen unter Berücksichtigung der dritten binomischen Formel ergibt sich dann für den Algorithmus: $s_{2n} = \frac{s_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}}$.

Wie Abbildung 4 zeigt, ergibt sich so eine Näherung für π mit einer Genauigkeit von 10 Stellen, und dieser Wert bleibt stabil.

	A	B	C	D	E	F
1	n-Eck					
2	6	1	3		1	3
3	12 0. 517638902	3. 105828541		0. 517638902	3. 105828541	
4	24 0. 261052944	3. 132628613		0. 261052944	3. 132628613	
5	48 0. 1308062585	3. 139350203		0. 1308062585	3. 139350203	
6	96 0. 0654381656	3. 141031951		0. 0654381656	3. 141031951	
7	192 0. 0327234633	3. 141452472		0. 0327234633	3. 141452472	
8	384 0. 0163622792	3. 141557608		0. 0163622792	3. 141557608	
9	768 8. 1812081E-3	3. 141583892		8. 18120805E-3	3. 141583892	
10	1536 4. 0906126E-3	3. 141590463		4. 09061258E-3	3. 141590463	
11	3072 2. 0453074E-3	3. 141592106		2. 04530736E-3	3. 141592106	
12	6144 1. 0226538E-3	3. 141592512		1. 02265381E-3	3. 141592512	
13	12288 5. 1132892E-4	3. 141592602		5. 11328924E-4	3. 141592619	
14	24576 2. 5568347E-4	3. 141592723	3. 141592654	2. 55683464E-4	3. 141592645	
15	49152 1. 2783173E-4	3. 141592482		1. 27831732E-4	3. 141592651	
16	98304 6. 3915882E-5	3. 141593443		6. 39158862E-5	3. 141592653	
17	196608 3. 1957941E-5	3. 141593443		3. 19579331E-5	3. 141592653	
18	393216 1. 9979049E-5	3. 141608823		1. 99790665E-5	3. 141592654	

Abb. 4 Verbesserte Näherung für π

Rätselcke

Knobelei 1:

Einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge 390 mm wird ein gleichseitiges Dreieck so einbeschrieben, dass dessen Eckpunkte die Dreiecksseiten im Verhältnis 20 : 19 teilen (Abb. 1).

Beweisen Sie, dass sich die Flächeninhalte der gleichseitigen Dreiecke wie 127 : 507 verhalten.

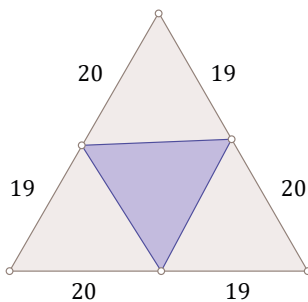


Abb. 1

Knobelei 2:

Die Punkte P , Q und R teilen die Dreiecksseiten \overline{AB} , \overline{BC} beziehungsweise \overline{CA} im selben Verhältnis $m : n$ (Abb. 2).

Bestimmen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke PQR und ABC .

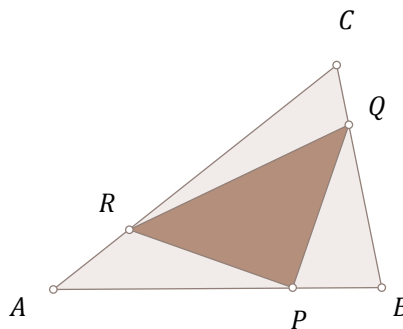


Abb. 2

Buchvorstellung

Messen und Auswerten mit dem C-Lab, Coach 7 und dem ClassPad-Manager in der Elektrizitätslehre

Autor: Dr. Peter Rieger

Messwerterfassung mit Spezialisierung auf die Elektrizitätslehre ist das Thema des brandneuen Buches von Dr. Peter Rieger von der Universität Leipzig. Sowohl mit dem Computer als auch mit dem ClassPad II werden zahlreiche Experimente der Elektrizitätslehre durchgeführt und ausführlich ausgewertet. Eine Anleitung für den Datenaustausch und die allgemeine Bedienung der Messwerterfassung ist enthalten und erleichtert so Einsteigern den Umgang mit dem C-Lab.

Sie finden dieses und weitere Bücher kostenfrei als PDF in unserer Materialdatenbank:

www.casio-schulrechner.de



Auf verschiedenen Wegen zur Markov-Kettenlänge

Autor: Gunther Gageur – CASIO Educational Team

Die „Dreimal-mindestens-Aufgabe“ ist in den Schulbüchern oft so formuliert, dass mindestens ein Treffer erzielt werden soll. Wenn nach mindestens k Treffern mit $k \geq 2$ gefragt wird, dann ergeben sich Gleichungen, deren Lösungen nicht mehr in formelmäßig geschlossener Form angegeben werden können, z.B. hier:

27% aller Pkw in Deutschland sind blau. Bestimme die Anzahl der Pkw, die mindestens an mir vorbeifahren müssen, damit mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit mindestens drei blaue Pkw dabei waren.

Solche Aufgaben können z.B. über die Gegenwahrscheinlichkeit $1 - 90\% = 10\%$ gelöst werden. Dieser wiederum entsprechen die Wahrscheinlichkeiten für keinen, einen und zwei Treffer, die mit der kumulierten Binomialverteilung errechnet werden können:

$$\sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} < 0,1$$

Die zugehörige Gleichung lässt sich jedoch nur dann mit dem Newton-Verfahren nach n lösen, wenn die Binomialkoeffizienten weitestgehend gekürzt werden:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}{k!}, (k > 0).$$

Wird der FX-991DE X verwendet, dann kann die Aufgabe beispielsweise

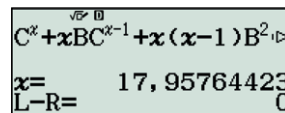
mit $B=p=0,27$, $C=1-p=0,73$ und dem Startwert $x=10$ so gelöst werden:

$$C^x + xBC^{x-1} + x(x-1)B^2C^{x-2} + 2 = 0, 1$$

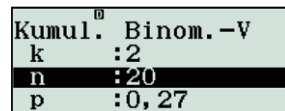
Unter SOLVE (Shift, Calc) kann B, C und x eingegeben und mit „Cursor hoch“ x als Lösungsvariable gewählt werden:



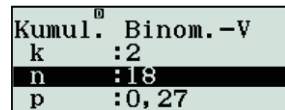
Wird bei dieser Anzeige „=“ gedrückt, dann löst der Rechner nach x und erhält knapp 18 als Ergebnis:



Ab dem FX-87DE Plus ist es mit jedem höheren Rechner möglich, in den Verteilungsfunktionen geschickt herumzuprobieren, um so die Lösung zu finden.



$P \approx 0,064$

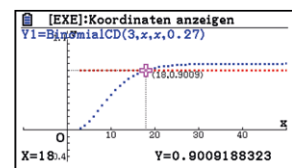


$P \approx 0,099$

Wird mit FX-CG50 / ClassPad II gerechnet, dann können solche Aufgaben zusätzlich in der Tabellen-App oder im Rechenbereich mittels SolveN gelöst werden:

In der Funktionswertetabelle (Menu 7 / Grafik&Tabelle) wird eine solche Aufgabe gelöst, indem die entsprechende diskrete Funktion eingegeben wird und die Wertetabelle von 3 bis zu einer genügend hohen Zahl eingestellt wird (SET / $\frac{\square}{\square}$). Dann kann in der Tabelle abgelesen werden oder der Graph gezeichnet und mit Trace abgefahren werden.

Um das Fenster schnell einzustellen, empfiehlt es sich, die Autozoomfunktion zu nutzen (Graph, Zoom, Auto) und dann wieder einmal aus dem Fenster herauszuzoomen (-). Über Trace (F1 / $\frac{\square}{\square}$) kann dann am Graphen abgelesen werden.



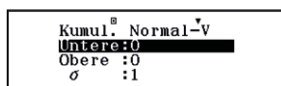
Am schnellsten geht es im normalen Rechenbereich mit SolveN und der Umkehrung der BinomialCD-Funktion. Auch dort heißt das Ergebnis 18.



Forschungsaufgabe

Unendlich sinnvoll wählen

Autor: Stephan Schanbacher, Wöhlerschule, Frankfurt



Der FX-991DE X lässt bei Berechnungen mit der Gauß'schen Summenfunktion

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \varphi_{0;1}(t) dt$$

keine untere Grenze $-\infty$ zu. Sie muss daher „hinreichend klein“ gewählt werden, damit der Fehler keine Rolle spielt. Welche untere Grenze zu wählen ist, damit der Fehler der berechneten Wahrscheinlichkeiten unter $1/100.000$ liegt, soll in dieser Aufgabe überprüft werden.

Dafür wird die Funktion

$$\varphi_{0;1}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$$

zunächst mit Funktionen der Schar

$$f_k(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{kz}{2}}$$

im negativen Definitionsbereich verglichen ($k > 0$).

(1) Bestätigen Sie, dass $z = 0$ und $z = -k$ die einzigen Schnittpunkte von $\varphi_{0;1}$ und f_k sind.

(2) Begründen Sie, dass für $z \leq -k$ gilt: $\varphi_{0;1}(z) \leq f_k(z)$

(3) Begründen Sie die (Un-)Gleichungen in den Schritten (1) und (2) sowie die Bedeutung von Schritt (3).

Eine Explorationsaufgabe aus der Analysis mithilfe des ClassPad II

Autor: Manuel Garcia Mateos, Landesinstitut für Pädagogik und Medien, Saarland

Aufgabenstellung:

Gegeben ist eine Normalparabel, eine Gerade g , die die Normalparabel f mit $f(x) = x^2$ an zwei Punkten A und B schneidet, sowie eine zur Geraden parallele Tangente t an die Normalparabel.

Die Gerade und die Normalparabel schließen ein Parabelsegment ein. Die Schnittpunkte A und B der Normalparabel mit der Geraden g bilden mit dem Berührungspunkt P der Tangente ein Dreieck.

Untersuchen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte des Dreiecks und des Parabelsegments (s. Abbildung 1).

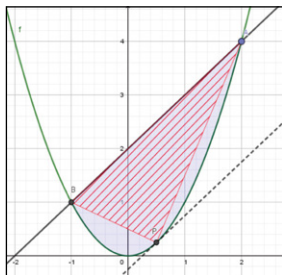


Abb. 1: Darstellung der Situation

Bei der vorliegenden Aufgabe handelt es sich um eine Explorationsaufgabe der Analysis, an der sich u. a. heuristische Problemlösestrategien erfahren lassen und die sinnvollerweise auch mit einem CAS-Rechner bearbeitet werden kann, aber nicht muss. Sinnvollerweise lässt sich diese Aufgabe im Zusammenhang mit der Integralrechnung formulieren.

Wird die Aufgabenstellung so verändert, dass das Ergebnis vorweggenommen wird, also indem gesagt wird: „Zeigen Sie, dass das Verhältnis stets $\frac{3}{4}$ beträgt.“, dann wird aus der Explorationsaufgabe eine komplexe Problemlöseaufgabe.

Der CAS-Rechner (z. B. ClassPad II) kann hier die Exploration unterstützen und für den Mathematikunterricht förderlich sein. Bei der Exploration liegt das Hauptaugenmerk auf der Entdeckung von (funktionalen oder geometrischen) Zusammenhängen, der Formulierung, Dokumentation und Reflektion sowie der Kommunikation von Ideen, Rechenwegen und Ergebnissen und dem Prozess der mathematischen Problemlösung sowie der Förderung der Zusammenarbeit, also der Förderung allgemein-mathematischer Kompetenzen. Explorationsaufgaben dienen u. a. dazu, Arbeits- und Denkweisen in der Mathematik zu erlernen. Daher ist es wichtig, komplexe Rechnungen auszulegen. Das CAS hilft und entlastet hier und ist somit ein geeignetes technisches Hilfsmittel, um die im Fokus stehenden Prozesse und Kompetenzen zu fördern.

Im Folgenden wird zunächst die fachliche Seite der Aufgabe beleuchtet und die Aufgabe allgemein gelöst, um dann in einem zweiten Teil eine mögliche unterrichtliche Herangehensweisen darzustellen.

1. Bearbeitung der Aufgabe

Gegeben ist eine Normalparabel mit $f(x) = x^2$ und eine Gerade g mit $g(x) = mx + b$. Wenn sich die Graphen der beiden Funktionen schneiden, dann gilt für die beiden Schnittpunkte $x_{1,2} = \frac{m}{2} \pm \frac{\sqrt{m^2+4b}}{2} = \frac{m}{2} \pm k$ für $m^2 > -4b$ (s. Abbildung 2).

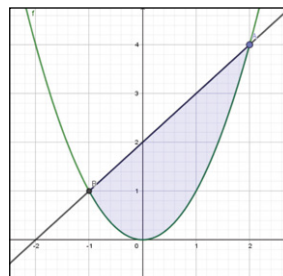


Abb. 2: Visualisierung des Parabelsegments

Die Fläche zwischen der Parabel und der Geraden lässt sich als Differenz eines Trapezes und der Flächen zwischen Parabel und x-Achse berechnen (s. Abbildung 3). Es ist

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot \left(\left(\frac{m}{2} + k \right)^2 + \left(\frac{m}{2} - k \right)^2 \right) = \frac{1}{2} m^2 k + 2k^3$$

$$\int_{\frac{m}{2}-k}^{\frac{m}{2}+k} x^2 dx = -\frac{1}{24} (m^3 - 8k^3 + 12mk^2 - 6m^2k) \text{ und}$$

$$\int_0^{\frac{m}{2}+k} x^2 dx = \frac{1}{24} (m^3 + 8k^3 + 12mk^2 + 6m^2k)$$

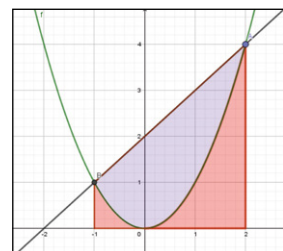


Abb. 3: Berechnungsmöglichkeit des Segments

Für die eingeschlossene Parabelsegmentfläche gilt daher

$$A_{\text{Parabel}} = A_{\text{Trapez}} - \left(\int_{\frac{m}{2}-k}^{\frac{m}{2}+k} x^2 dx + \int_0^{\frac{m}{2}+k} x^2 dx \right) = \frac{1}{2} m^2 k + 2k^3 - \left(\frac{1}{2} m^2 k + \frac{2}{3} k^3 \right) = \frac{4}{3} k^3$$

Die zu g parallele Tangente t an den Graphen von f hat die Geradengleichung $t(x) = mx + b$ und berührt wegen $m = f'(x_0) = 2x_0$ den Graphen von f an der Stelle $x_0 = \frac{m}{2}$. Der Berührungspunkt der Tangente lautet somit $P \left(\frac{m}{2} \mid \frac{m^2}{4} \right)$. Die beiden Schnittpunkte A und B bilden mit dem Berührungspunkt P ein Dreieck.

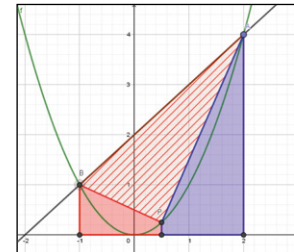


Abb. 4: Berechnung des Dreiecks ABP

Der Flächeninhalt des Dreiecks ergibt sich z. B., wenn vom Flächeninhalt des Trapezes $A_{\text{Trapez}} = \frac{1}{2} m^2 k + 2k^3$ die Flächeninhalte der beiden kleineren Trapeze subtrahiert werden (s. Abbildung 4). Alternativ kann der Flächeninhalt aus den Koordinaten der Punkte A , B und P bestimmt werden. Für die kleinen Trapeze gilt entsprechend:

$$A_1 = \frac{1}{2} k \cdot \left(\left(\frac{m}{2} - k \right)^2 + \left(\frac{m}{2} \right)^2 \right) = \frac{1}{4} m^2 k - \frac{1}{2} m k^2 + \frac{1}{2} k^3$$

$$A_2 = \frac{1}{2} k \cdot \left(\left(\frac{m}{2} + k \right)^2 + \left(\frac{m}{2} \right)^2 \right) = \frac{1}{4} m^2 k + \frac{1}{2} m k^2 + \frac{1}{2} k^3$$

Daher gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks

$$A_{\text{Dreieck}} = A_{\text{Trapez}} - (A_1 + A_2) = \frac{1}{2} m^2 k + 2k^3 - \frac{1}{2} m^2 k - k^3 = k^3$$

Sowohl der Flächeninhalt des Parabelsegments als auch der des Dreiecks sind proportional zum kubischen Abstand k^3 der Schnittpunkte $x_{1,2}$ zur Berührstelle $x_0 = \frac{m}{2}$. Das Verhältnis der beiden Flächeninhalte ist somit konstant und es ist

$$\frac{A_{\text{Dreieck}}}{A_{\text{Parabelsegment}}} = \frac{k^3}{\frac{4}{3} k^3} = \frac{3}{4}$$

2. Unterrichtliche Behandlung

Bei dieser Problemlöseaufgabe lassen sich die drei allgemeinen didaktischen Prinzipien („didaktischer Dreiklang“) gut im Unterricht umsetzen: 1) Vom Konkreten zum Abstrakten, 2) Vom Speziellen zum Allgemeinen und 3) Vom Einfachen zum Komplexen. Für das Verständnis der Aufgabe ist eine Skizze der Situation unter Betrachtung von Spezialfällen bzw. konkreten Zahlen hilfreich. Zunächst wird der Fall betrachtet, dass die Normalparabel von der Geraden g mit der Gleichung $g(x) = 1$ geschnitten wird (s. Abbildung 5).

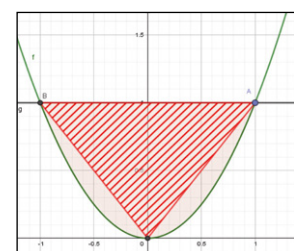


Abb. 5: Spezialfall mit $g(x)=1$

Die Fläche des Parabelsegments lässt sich als Differenz eines Rechtecks und der Fläche „unterhalb der Parabel“ (mithilfe der Integralrechnung) ermitteln. Die Fläche für diesen Spezialfall ist $A_{\text{Parabelsegment}} = \frac{4}{3}$. Entsprechend lässt sich der Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks aus der Höhe und der Länge der Grundseite ermitteln. Es ist $A_{\text{Dreieck}} = 1$. Das Verhältnis ist daher $\frac{A_{\text{Dreieck}}}{A_{\text{Parabelsegment}}} = \frac{3}{4}$.

Dieses Vorgehen lässt sich auf den Fall verallgemeinern, dass $g(x) = a^2$ mit $a > 0$ gilt. Die Schnittpunkte des Graphen von f mit der Geraden sind bei $x_{1,2} = \pm a$. Das Parabelsegment hat die Größe $A_{\text{Parabelsegment}} = 2a^3 - \frac{2}{3}a^3 = \frac{4}{3}a^3$; das gleichschenklige Dreieck entsprechend $A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a^2 = a^3$. Somit ist das Verhältnis wieder $\frac{A_{\text{Dreieck}}}{A_{\text{Parabelsegment}}} = \frac{3}{4}$.

Ein weiterer Spezialfall ergibt sich für die Gerade $g(x)=1x$. Die Gerade schneidet die Parabel im Ursprung $A(0|0)$ und dem Punkt $B(1|1)$ (s. Abbildungen 6 und 7).

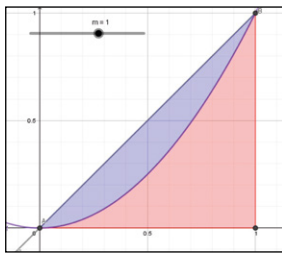


Abb. 6: Parabelsegment bei $g(x)=x$

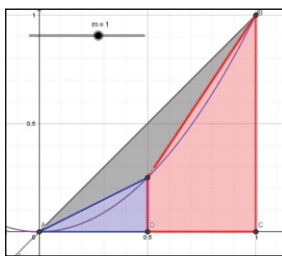


Abb. 7: Dreieck APB bei $g(x)=1$

Die Fläche des Parabelsegments ergibt sich aus der Differenz des Flächeninhalts des Dreiecks $A(0|0)$, $C(1|7)$, $B(1|1)$ und der Fläche unter der Parabel $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$. Es ist $A_{\text{Parabelsegment}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Gesucht ist nun die Berührstelle der Tangente an den Graphen. Eine Möglichkeit, diese zu ermitteln, liefert der Mittelwertsatz der Differentialrechnung, denn dieser garantiert die Existenz einer solchen Stelle x_0 mit $f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$. Einsetzen liefert $(1 - 0) = 2x_0(1 - 0)$. Hieraus ergibt sich als Berührstelle $x_0 = \frac{1}{2}$ und der Berührungspunkt $P(\frac{1}{2}|\frac{1}{4})$. Der Flächeninhalt des Dreiecks ergibt sich aus der Differenz der Flächeninhalte des „großen“ Dreiecks ACB und der Summe der Flächeninhalte des Dreiecks ADP und des Trapezes $DCBP$.

Eine entsprechende Verallgemeinerung des Spezialfalls auf die Schnittgerade $y = m \cdot x$ liefert die Berührstelle der Tangente $x_0 = \frac{m}{2}$. Die Berührstelle der Tangente liegt immer in der Mitte zwischen den beiden Schnittpunkten! Es ergibt sich für die Parabelsegmentfläche $A_{\text{Parabelsegment}} = \frac{1}{2}m^3 - \frac{1}{3}m^3 = \frac{1}{6}m^3$ und für die Dreiecksfläche $A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2}m^3 - (\frac{1}{16}m^3 + \frac{5}{16}m^3) = \frac{1}{8}m^3$.

Damit ergibt sich wieder ein Verhältnis von $\frac{A_{\text{Dreieck}}}{A_{\text{Parabelsegment}}} = \frac{3}{4}$.

Wird nun die Gerade $y=mx$ parallel um b Einheiten in y -Richtung verschoben, dann ändert sich am Berührungspunkt der Tangente nichts und die Schnittstellen der Parabel mit der Geraden sind symmetrisch zur Berührstelle ($x_{1,2} = m/2 \pm k$).

Im konkreten Fall ergeben sich für die Gerade g mit $g(x) = x + 2$ die Schnittpunkte $A(2|4)$ und $B(-1|1)$ sowie der Berührungspunkt $P(\frac{1}{2}|\frac{1}{4})$. Der Flächeninhalt des Parabelsegments ergibt sich aus einem Trapez und den Flächeninhalten der Parabel unterhalb der Kurve. Analog ergibt sich der Flächeninhalt des Dreiecks aus der Differenz des großen Trapezes und der Summe zweier kleinerer Trapeze. Die entsprechende Verallgemeinerung ist händisch rechenintensiv, aber kognitiv nicht weiter anspruchsvoll, wenn eine entsprechende Strategie entwickelt und die Symmetrieeigenschaften ausgenutzt werden, die in den konkreten Fällen entdeckt wurden (s. Abschnitt 1).

Auch die Variation der Aufgabe, etwa durch Betrachtung der Fragestellung auf die Parabel $h(x) = ax^2 + bx + c$, stellt keine weiteren kognitiven Herausforderungen, denn diese Parabeln ergeben sich aus der Normalparabel durch Verschiebung und Streckung in y -Richtung. Auf das Verhältnis der Flächeninhalte haben diese Transformationen keinen Einfluss. Die Schwierigkeit ergibt sich hierbei nur noch auf einer rechnerisch-technischen Ebene, die sich aber durch Einsatz eines CAS-Rechners als irrelevant herausstellt.

3. Umsetzung mithilfe des CAS-Rechners

Die folgenden Screenshots (s. Abbildung 8) zeigen eine mögliche Umsetzung des allgemeinen Problems mithilfe des ClassPad II. Allerdings empfiehlt es sich im Unterricht, dieses Problem mithilfe des CAS unter Berücksichtigung der drei didaktischen Prinzipien zu behandeln, also die Schüler aufzufordern, zunächst konkrete Zahlen zu verwenden und Spezialfälle zu betrachten und dann langsam zu variieren. Die Schüler sollten das Problem zunächst mit der Normalparabel und den Geraden $g(x) = 1$, $g(x) = 2$ und $g(x) = 3$ lösen. Im Anschluss dann mit der Normalparabel und $g(x) = a$. Dann kann die Normalparabel und $g(x) = x$, $g(x) = 2x$ und $g(x) = 3x$ betrachtet werden, um dann auf die Gleichung $g(x) = m \cdot x$ zu verallgemeinern.

Im Anschluss wird dann $g(x) = x + 2$ und $g(x) = x + 3$ bzw. $g(x) = 2x + 1$ und allgemein $g(x) = mx + b$ betrachtet. Es empfiehlt sich eine arbeitsteilige Gruppenarbeit als Sozialform, in der die Ergebnisse der einzelnen Fälle gesammelt werden.

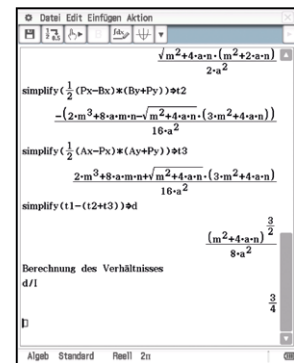
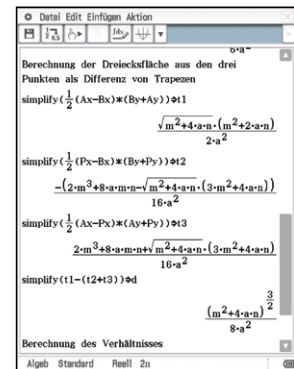
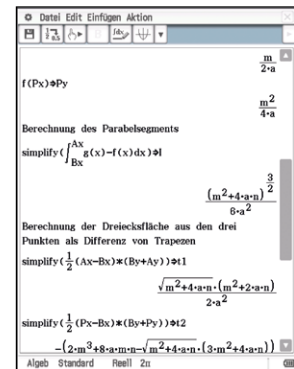
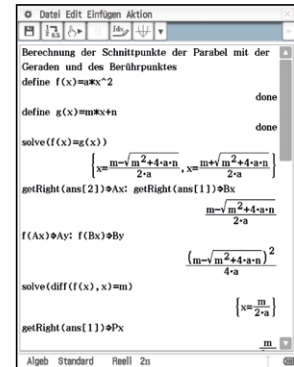


Abb. 8: Parabelsegment bei $g(x)=x$

Maßgeschneiderte Informationen für Mathematiklehrkräfte

Die kontinuierliche Bereitstellung von Unterrichtsmaterial, das zum einen mit den Anforderungen der Lehrpläne in den Bundesländern harmonisiert und zum anderen den Einsatz und die Bedienung der Schulrechner erleichtert, ist ein Herzstück des Lehrersupports von CASIO. Dafür steht CASIO in regelmäßigem Austausch mit Mathematiklehrkräften.

Informationsaussand zum Beispiel zu folgenden Themen:

- CASIO forum mit vielen Aufgabenbeispielen und Unterrichtseinheiten,
- Informationen zu regionalen Veranstaltungen,
- Neuerungen in den Zulassungsrichtlinien,
- bundeslandspezifische Angebote,
- Lehrerspezial holt reale Alltagsthemen in den Mathematikunterricht.

Das Feedback aus der Lehrerschaft zeigt – ein Service, der geschätzt wird.

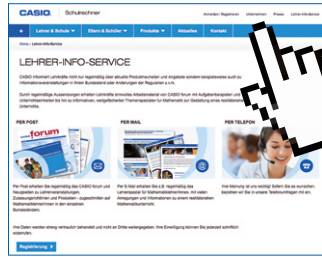


Anmeldung

Sie möchten ebenfalls maßgeschneiderte Informationen für Mathematiklehrkräfte erhalten – dann sind Sie herzlich beim Lehrer-Info-Service von CASIO willkommen. Ob per Post oder per E-Mail – Sie entscheiden selbst, wie Sie von CASIO kontaktiert werden möchten und haben jederzeit die Gelegenheit, sich auch wieder abzumelden.

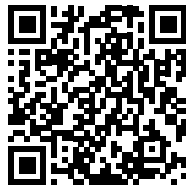
Anmeldung im Netz

Unter dieser Web-Adresse können Sie unsere Informationen abonnieren:
www.casio-schulrechner.de/lehrerinfoservice



Anmeldung per QR-Code

Scannen Sie einfach den QR-Code.



Educational Team

Unsere Spezialisten rund um das Thema Schulrechner von CASIO und deren Einsatz im Mathematikunterricht stehen Ihnen bei Fragen jederzeit zur Verfügung:
 Telefon: +49 (0)40/528 65-0
 Fax: +49 (0)40/528 65-100
 E-Mail: education@casio.de
 Homepage: www.casio-schulrechner.de

CASIO European Support Center

Für Beratung und technische Informationen wenden Sie sich an das CASIO European Support Center:
 Telefon: +49 (0)40/528 65-802
 Fax: +49 (0)40/528 65-888
 E-Mail: support_center@casio.de

Anfragen zu Reparaturen

Bei Fragen rund um das Thema Reparatur stehen Ihnen Experten unter folgenden Kontaktdaten zur Verfügung:
 Telefon: +49 (0)40/528 65-203
 Fax: +49 (0)40/528 65-242
 E-Mail: repair@casio.de

Übersicht über die aktuellen Betriebssystemversionen (OS)

Die Updates sowie die Testsoftware stehen zum kostenlosen Herunterladen auf unserer Internetseite bereit: edu.casio.com

Gerät	OS-Version
ClassPad II	2.01.6000
FX-CG20/50	3.11/3.20
FX-9860	2.09
Software	
ClassPad II Manager	2.01.5000 (Win) 2.01.5001 (Mac)
ClassPad App	über App-Stores (Android/iOS)
FX-CG50 Manager	3.20 (Win/Mac)
FX-CG20 Manager	3.10.0010 (Win/Mac)
FX-Manager Plus	2.10.0010 (Win)
ClassWiz Emulator	2.00.0010 (Win)

Updates bis Juni 2019



CASIO Support für Lehrer!

Ob technisch-wissenschaftlicher Rechner oder Grafikrechner – mit dem umfangreichen Support-Programm von CASIO unterstützt Sie das Educational Team bestens bei der Auswahl des passenden Schulrechners bis hin zur Gestaltung Ihres Unterrichts.

Support-Programm

- Referenzschulen
- Lehrer-Workshops
- Lehrer-Info-Service (u.a. CASIO forum)
- Leihprogramme
- Prüfangebote
- Literatur
- Materialdatenbank

Herausgeber:
 CASIO Europe GmbH
 Casio-Platz 1 • 22848 Norderstedt
 Tel.: 040/528 65-0 • Fax: 040/528 65-535

Bildquellen:
 S. 1: M. Mettin, Offenbach; www.m-momente.de

Redaktion:
 Gerhard Glas und Armin Baeger
 CASIO Educational Team • education@casio.de

Design:
 CONSEQUENCE
 Werbung & Kommunikation GmbH, HH

Copyright für alle Beiträge, soweit nicht anders angegeben, bei CASIO Europe GmbH. Für unverlangt eingesandte Manuskripte, Fotos und Zeichnungen wird keine Haftung übernommen. Nachdruck nur mit schriftlicher Genehmigung und Urhebervermerk.